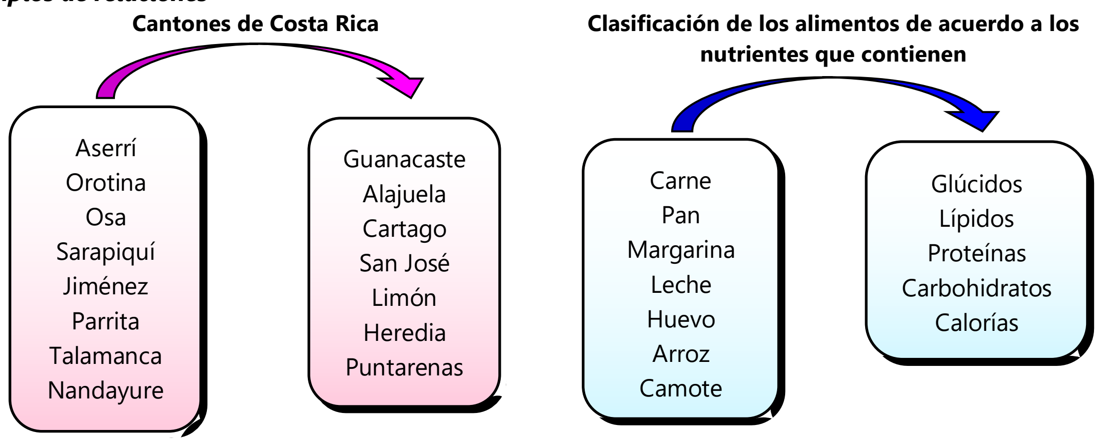
CINDEA TILARA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
PROF. MICHAEL CASTRO SOLANO
MATERIAL # 2 – MODULO 75

TEMA: FUNCIONES REALES

Para comprender el concepto de ***función*** es necesario conocer antes el concepto de ***relación***. Una ***relación*** es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos mediante una regla que permite asociar a algunos o a todos los elementos del primer conjunto con algunos o todos los elementos del segundo conjunto.
Las relaciones pueden representarse de diferentes formas; por medio de tablas, diagramas, entre otras que más adelante se estudiarán y se denotan usualmente por medio de letras minúsculas.

Ejemplos de relaciones



Se acostumbra denominar al primer conjunto, conjunto *de partida*; al segundo conjunto se le denomina *conjunto de llegada*.

Tipos de Variables

Según el conjunto al que pertenezcan las variables (característica que puede tomar diferentes valores) éstas se pueden clasificar como *variables independientes* (si pertenece al conjunto de partida) o *variables dependientes* (si pertenece al conjunto de llegada). Se denomina de esa forma porque la segunda variable depende del valor de la primera.

Ejemplos

En la siguiente tabla, el dinero recaudado en el baile depende de la cantidad de personas que asistan y de la regla dada.

Cantidad de personas	Dinero recaudado (en colones)
180	¢270 000
200	¢300 000
205	¢307 500
230	¢345 000
250	¢375 000

Regla de la relación: cada elemento de la columna de la izquierda se asocia con el producto de ese elemento y 1500 en la columna de la derecha.

En la siguiente tabla, la cantidad de puntos depende de la cantidad de partidos ganados y de la regla dada.

Cantidad de partidos ganados	Cantidad de puntos
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

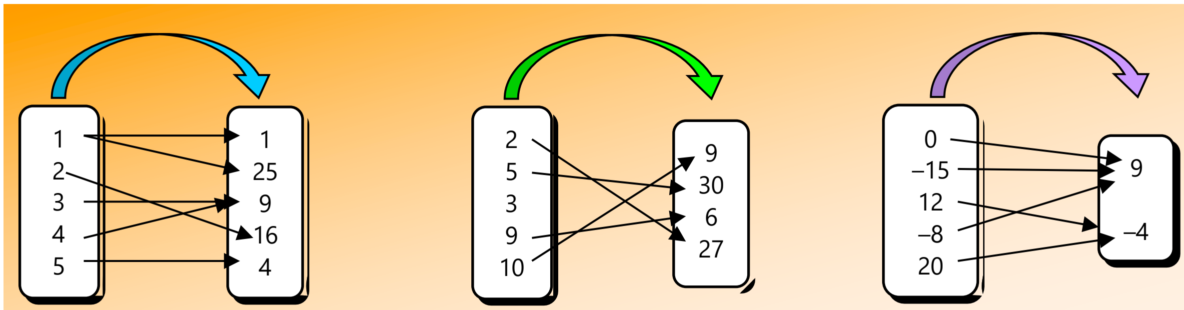
Regla de la relación: cada elemento de la primera columna se asocia con su triple en la segunda columna.

Concepto de función:

Una función es una relación entre dos conjuntos que cumple que

- El conjunto de partida y el conjunto de llegada NO son vacíos.
- A **cada** elemento del conjunto de partida se le relaciona con un **único** elemento del conjunto de llegada.

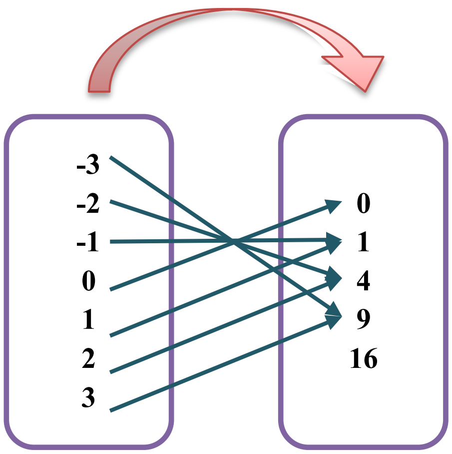
Toda aquella relación que <u>no cumpla con ambas condiciones</u> NO es una función. ***Ejemplos***



EJERCICIOS

Determine en cada uno de los casos si la relación corresponde o no a una función. Justifique.

(a)

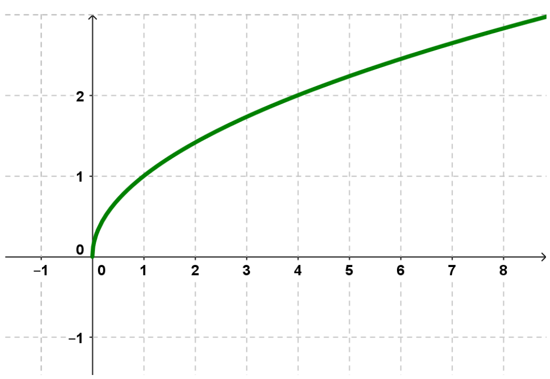


(b)

x	-2	-1	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	5	-1	-5	6	-4	3

(c) $G_f: \{(9,-2),(1,10),(-3,4),(5,-2),(3,1,),(8,-3),(0,5)\}$

(d)



(e) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \qquad t.q. \qquad f(x) = \dfrac{3}{x-1}$

En una función se relacionan los siguientes conceptos:

Dominio: Se denomina de esa forma al conjunto de partida. Al valor que toma la variable independiente se le conoce con el nombre de preimagen.

Codominio: Se denomina de esa forma al conjunto de llegada.

Ámbito o rango: Se denomina así al conjunto de valores que toma la variable dependiente en una función. El ámbito de una función es un subconjunto del codominio de la misma función. A los elementos del ámbito de una función se le denominan imágenes.

OJO: En una función, puede haber elementos del codominio que no sean imágenes es decir; que no estén relacionados con ningún elemento del dominio.

Notación de una función

Para representar una función f en la que su dominio es el conjunto A y su codominio es el conjunto B, se utiliza la notación:

$f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ se lee "**f** es una función de A en B "

La relación entre una preimagen **x** y su respectiva imagen **y** se puede escribir de la siguiente forma:

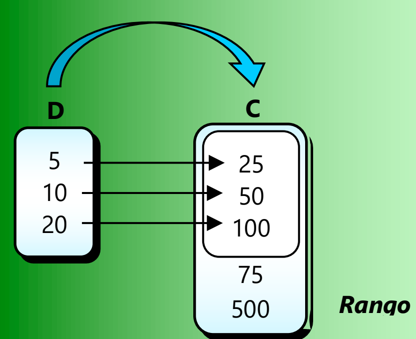
$f(x) = y$ se lee "**f** de **x** es igual a **y** "

- **x** corresponde al valor que toma la variable independiente (preimagen)
- **y** corresponde al valor que toma la variable dependiente (imagen)

Ejemplos

Preimágenes e imágenes

Preimagen (x)	**Imagen (y)**	***f*(*x*)=y**
5	25	*f*(5)=25
10	50	*f*(10)=50
20	100	*f*(20)=100



Dominio de f: $\mathrm{D} = \{5, 10, 20\}$

Codominio de f: $\mathrm{D} = \{25, 50, 75, 100, 500\}$

Ámbito de f: $\mathrm{D} = \{25, 50, 100\}$

$f : \mathrm{D} \to \mathrm{C}$

Criterio de una función

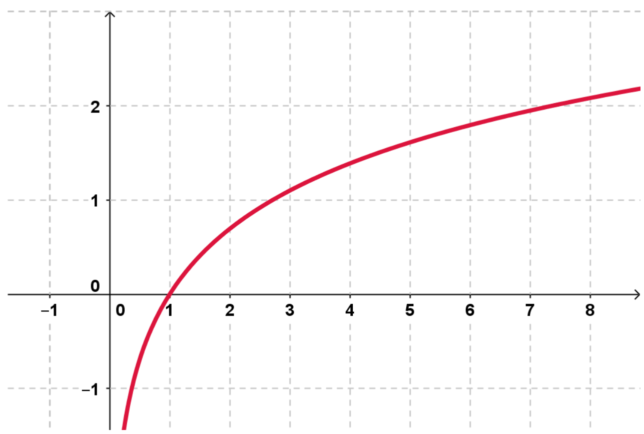
El criterio de una función es la condición o regla que se fija para relacionar los elementos del dominio con los del codominio.

Corresponde a un polinomio escrito en términos de la variable independiente y la fórmula describe la "transformación" que sufre ésta.

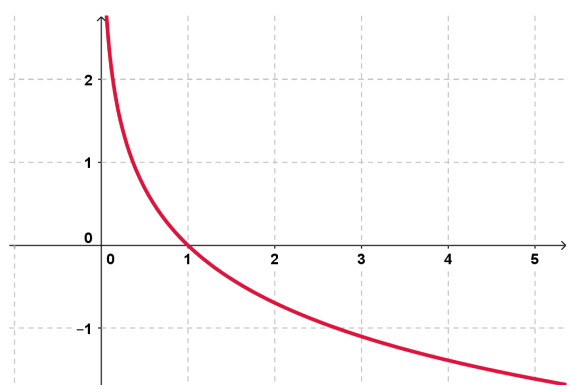
Régimen de variación una función

Corresponde al comportamiento de la gráfica conforme avanzan los valores de x. La gráfica puede comportarse o no, de manera uniforme (un solo comportamiento).

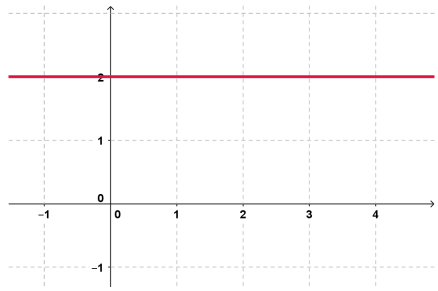
<u>FUNCIÓN CRECIENTE</u>: Si para todo $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$ se dice que la función es creciente.



<u>FUNCIÓN DECRECIENTE</u>: Si para todo $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$ se dice que la función es decreciente.

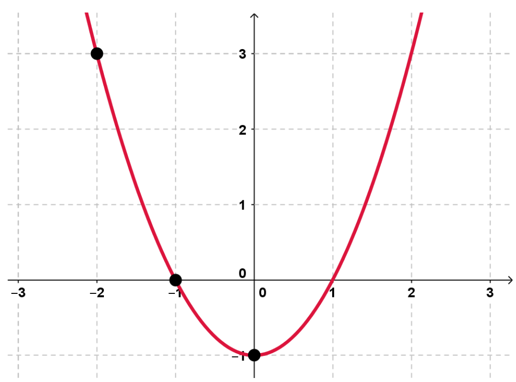


<u>FUNCIÓN CONSTANTE</u>: Si para todo $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) = f(x_2)$ se dice que la función es constante.



Cálculo de imágenes

Por medio del criterio de la función real es posible calcular la imagen asociada a una determinada preimagen x. Se trata de hallar el valor que toma la variable y para un valor dado de x. Lo cual se reduce a sustituir el valor de x en el criterio de la función f, se efectúan las operaciones indicadas y el valor obtenido corresponde a la imagen de la preimagen dada. Igualmente, a partir de la gráfica de una función, es posible obtener la imagen de cualquier valor que pertenezca a su dominio.



Composición de funciones

Dadas dos funciones reales de variable real, f y g, se llama composición de las funciones f y g, y se escribe $g\ o\ f$, a la función definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, por $(g\ o\ f)(x) = g[f(x)]$. Primero actúa la función f y después actúa la función g, sobre $f(x)$.

Ejercicio (será resuelto en clases)

Sean las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$. Calcular $g\ o\ f$ y la imagen mediante esta función de 1, 0 y –3.

PRÁCTICA DE FUNCIONES REALES

A. Determine si las relaciones dadas corresponden o no a funciones. Justifique.

1.

x	0	4	6	10	14
y	0	2	3	5	7

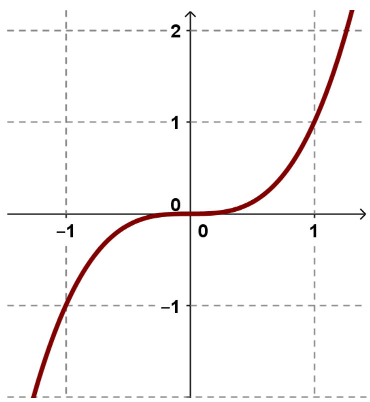
2.

x	–2	–1	0	1	4
y	–8	–1	0	1	64

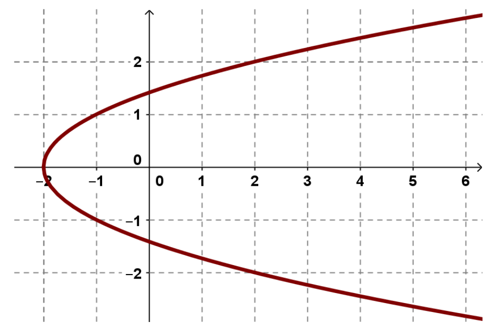
3. $G_f: \{(9,3),(1,1),(9,-3),(1,-1),(0,0)\}$

4. $G_f: \{(-3,-7),(-1,-3),(0,-1),(5,9)\}$

5.



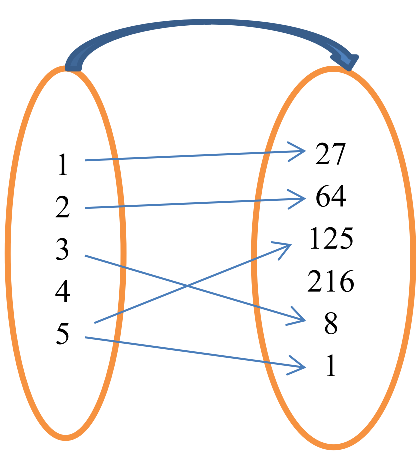
6.



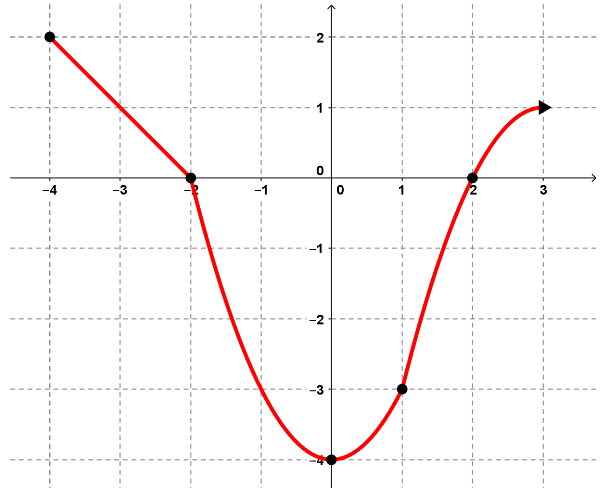
7. $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} \quad t.q. \quad f(x) = \sqrt{x}$

8. $f:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad t.q. \quad f(x) = \dfrac{1}{x}$

9.



B. Para cada una de las figuras dadas, conteste lo que se le solicita.



¿Cuál es el dominio de la función?

¿Cuál es el ámbito de la función?

¿En qué intervalos la función es negativa?

¿En qué intervalos la función es positiva?

¿En qué intervalos la función es creciente?

¿En qué intervalos la función es decreciente?

¿Cuál es la imagen de -4?

¿Cuál es la imagen de -2?

¿Cuál es la imagen de 0?

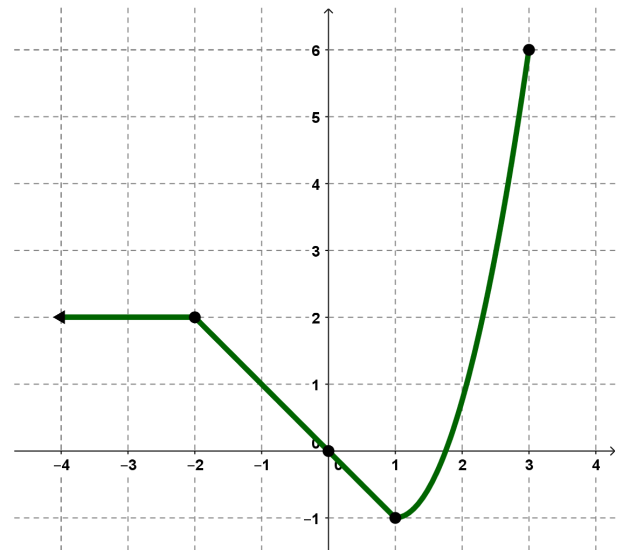
¿Cuál es la imagen de 1?

¿Cuál es la imagen de 2?

¿Cuál es el valor máximo de la función?

¿Cuál es el valor mínimo de la función?

¿Cuál es el dominio de la función?



¿Cuál es el ámbito de la función?

¿En qué intervalos la función es negativa?

¿En qué intervalos la función es positiva?

¿En qué intervalos la función es creciente?

¿En qué intervalos la función es decreciente?

¿En qué intervalos la función es constante?

¿Cuál es la imagen de -12?

¿Cuál es la imagen de -2?

¿Cuál es la imagen de 0?

¿Cuál es la imagen de 1?

¿Cuál es la imagen de 3?

¿Cuál es el valor máximo de la función?

¿Cuál es el valor mínimo de la función?

C. Considere las funciones $f(x) = x^2 - 5$; $g(x) = \sqrt{3x + 4}$ y $h(x) = 2x - 1$. Calcule lo que se le solicita en cada uno de los casos.

(1) La imagen de 12 en (f o g).

(2) La imagen de 7 en (g o f).

(3) $h(-13) =$

(4) $f(0) =$

(5) $f[g(x)] =$

(6) $[h\ o\ f](x) =$

(7) $f[\,h(x)] =$

(8) $[g\ o\ h](x) =$

(9) $g[f(6)] =$

(10) $h[g(-1)] =$